نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **هندسه مختصاتی**

سوال ۱

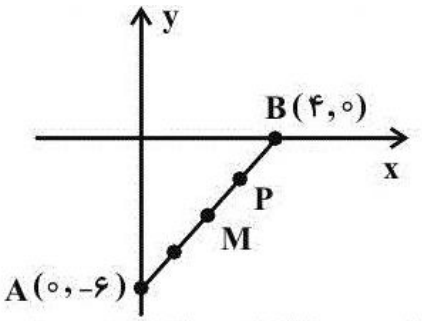
پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

ابتدا مختصات نقاط B و A را یافته و نمودار خط را رسم می‌کنیم:

$$A : x = ۰ \Rightarrow y = -۶ \Rightarrow A(۰\ ,\ -۶)$$

$$B : y = ۰ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow B(۴,\ ۰)$$



در صورتی‌که AB، ۴ برابر PB باشد و M را وسط AB درنظر بگیریم، نقطهٔ P وسط BM خواهد بود. پس داریم:

$$M : \begin{cases} x_M = \dfrac{۰+۴}{۲} = ۲ \\ y_M = \dfrac{-۶+۰}{۲} = -۳ \end{cases} \Rightarrow M(۲\ ,\ -۳)$$

$$\Rightarrow P : \begin{cases} x_P = \dfrac{۲+۴}{۲} = ۳ \\ y_P = \dfrac{-۳+۰}{۲} = -\dfrac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow P(۳\ ,\ -\tfrac{۳}{۲})$$

$$\Rightarrow OP = \sqrt{۹+\tfrac{۹}{۴}} = \sqrt{\tfrac{۴۵}{۴}} = \tfrac{۳\sqrt{۵}}{۲}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

نقطهٔ A روی خط $y = x + ۲$ هست پس می‌توانیم مختصات آن را به صورت $A(\alpha\ ,\ \alpha+۲)$ درنظر بگیریم:

$$\text{فاصلهٔ نقطهٔ A از خط } y = -x = \frac{|\alpha+۲+\alpha|}{\sqrt{۲}} = ۳\sqrt{۲}$$

$$|۲\alpha+۲| = ۶ \Rightarrow |\alpha+۱| = ۳ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲ \\ \alpha = -۴ \end{cases}$$

$$A_۱(۲\ ,\ ۴) \quad , \quad A_۲(-۴\ ,\ -۲)$$

$$A_۱A_۲ = \sqrt{(۴-(-۲))^۲ + (۲-(-۴))^۲} = \sqrt{۳۶\times ۲} = ۶\sqrt{۲}$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

چون در مربع قطرها عمودمنصف یکدیگرند، بنابراین شیب دو خط باید قرینه معکوس یکدیگر باشند.

$$\begin{cases} ۲ky - x + ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{شیب}} a = \frac{۱}{۲k} \\ y = (k - ۳)x + ۱ \xrightarrow{\text{شیب}} a' = k - ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a' = -\frac{۱}{a} \Rightarrow k - ۳ = -۲k \Rightarrow k = ۱$$

با جای‌گذاری $k = ۱$ در معادلات دو خط ملاحظه می‌شود که رأس A روی خط $۲y - x + ۳ = ۰$ قرار دارد. بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط $y = -۲x + ۱$ برابر نصف طول قطر مربع خواهد بود.

$$\text{نصف قطر} = \frac{|-۲(-۱)-۱(-۲)+۱|}{\sqrt{۴+۱}} = \frac{|۲+۲+۱|}{\sqrt{۵}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}}$$

$$\text{طول قطر مربع} = ۲ \times \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \text{قطر مربع} = \text{اندازهٔ ضلع} \times \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = \text{اندازهٔ ضلع} \times \sqrt{۲} \Rightarrow \text{اندازهٔ ضلع مربع} = \frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}}$$

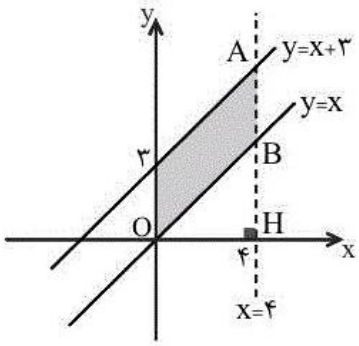
$$\Rightarrow \text{مساحت مربع} = \left(\frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}}\right)^۲ = ۱۰$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

با رسم نمودار خواهیم داشت:



مساحت متوازی‌الاضلاع = قاعده × ارتفاع

مساحت متوازی‌الاضلاع = $AB \times OH = ۳ \times ۴ = ۱۲$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

طبق تعریف عمودمنصف، باید فاصلهٔ نقطهٔ P از نقاط A و B یکسان باشد.

$$|AP| = |BP|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(۴m-۰)^۲+(۱۱-m)^۲} = \sqrt{(۴m-۶)^۲+(۱۱-۱۵)^۲}$$

$$\Rightarrow ۱۶m^۲ + ۱۲۱ - ۲۲m + m^۲ = ۱۶m^۲ - ۴۸m + ۳۶ + ۱۶$$

$$\Rightarrow m^۲ + ۲۶m + ۶۹ = ۰$$
$$\Rightarrow (m+۳)(m+۲۳) = ۰ \Rightarrow m = -۳ \quad , \quad m = -۲۳$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

فرض کنیم $A(x_۰ , -x_۰)$ نقطه‌ای روی نیمساز ناحیهٔ دوم باشد که فاصلهٔ آن از خط $-۲x + ۳y + ۴ = ۰$ برابر $۳\sqrt{۱۳}$ است. بنابراین:

$$d = \frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \Rightarrow ۳\sqrt{۱۳} = \frac{|-۲x_۰-۳x_۰+۴|}{\sqrt{(-۲)^۲+۳^۲}}$$

$$\Rightarrow ۳\sqrt{۱۳} = \frac{|-۵x_۰+۴|}{\sqrt{۱۳}} \Rightarrow ۳۹ = |-۵x_۰ + ۴|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳۹ = -۵x_۰ + ۴ \\ ۳۹ = ۵x_۰ - ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۰ = -۷ \\ x_۰ = \frac{۴۳}{۵} \end{cases}$$

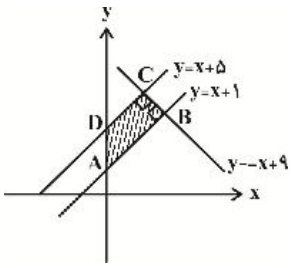
از آن جایی که نقطه در ناحیهٔ دوم قرار دارد طول آن منفی است، پس $x_۰ = -۷$ و عرض نقطه $y_۰ = ۷$ است.

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

با رسم شکل تقریبی چهارضلعی گفته شده داریم:



چهارضلعی ایجاد شده یک ذوزنقهٔ قائم‌الزوایه می‌باشد. برای یافتن ارتفاع کافیست فاصله دو خط AB و CD را بیابیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x + ۱ \\ y = x + ۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{فاصله}} \text{ارتفاع} = \frac{|۵ - ۱|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$$

برای یافتن اندازهٔ قاعده‌ها لازم است مختصات رئوس را بیابیم:

$$A : y = x + ۱ \xrightarrow{x=۰} y = ۱ \rightarrow A(۰, ۱)$$

$$B : x + ۱ = -x + ۹ \rightarrow x = ۴ \rightarrow y = ۵ \rightarrow B(۴, ۵)$$

$$C : x + ۵ = -x + ۹ \rightarrow x = ۲ \rightarrow C(۲, ۷)$$

$$D : y = x + ۵ \xrightarrow{x=۰} y = ۵ \rightarrow D(۰, ۵)$$

$$AB = \sqrt{(۵ - ۱)^۲ + (۴ - ۰)^۲} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$CD = \sqrt{(۷ - ۵)^۲ + (۲ - ۰)^۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{۴\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲}}{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۱۲$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، عمود منصف آن پاره‌خط است.

پس باید معادلهٔ عمودمنصف AB را بیابیم:

$$m_{AB} = \frac{۲-(-۲)}{-۵-۳} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = ۲$$

$$\text{وسط } AB : H(-۱, ۰) \xrightarrow{\text{معادله عمود منصف}} y - ۰ = ۲(x + ۱)$$
$$\Rightarrow y = ۲x + ۲$$

نکته: مساحت مثلثی که توسط یک خط و محورهای مختصات تشکیل می‌شود از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$S = \frac{۱}{۲} |\text{طول از مبدأ}| \times |\text{عرض از مبدأ}|$$

$$\text{عرض از مبدا} : x = ۰ \Rightarrow y = ۲$$
$$\text{طول از مبدا} : y = ۰ \Rightarrow x = -۱$$
$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}|-۱| \times |۲| = ۱$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

مختصات نقاط موردنظر را به‌صورت $A(۰, \alpha)$ در نظر می‌گیریم.

کافی است فاصلهٔ این نقطه تا خط $y + ۳x - ۵ = ۰$ را برابر $۳\sqrt{۱۰}$ قرار دهیم. بنابراین:

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۳(۰) + \alpha(۱) - ۵|}{\sqrt{۱^۲ + ۳^۲}} = \frac{|\alpha - ۵|}{\sqrt{۱۰}}$$
$$\Rightarrow d = ۳\sqrt{۱۰} = \frac{|\alpha - ۵|}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow ۳۰ = |\alpha - ۵|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - ۵ = ۳۰ \\ \alpha - ۵ = -۳۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_۱ = ۳۵ \\ \alpha_۲ = -۲۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(۰, ۳۵) \\ B(۰, -۲۵) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲} = \sqrt{۰^۲ + (۳۵ + ۲۵)^۲} = ۶۰$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

چون A و B دو سر قطر دایره‌اند، بنابراین وسط پاره‌خط AB مرکز دایره است.

$$\begin{cases} A(a, ۲a+۱) \\ B(۲, ۳) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{مرکز دایره}} O(\frac{a+۲}{۲}, \frac{۲a+۱+۳}{۲}) = (\frac{a+۲}{۲}, \frac{۲a+۴}{۲})$$

نقطهٔ O روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم قرار دارد، یعنی روی خط $y = x$ واقع است، پس طول و عرض نقطهٔ O با هم برابرند.

$$y = x \Rightarrow \frac{۲a+۴}{۲} = \frac{a+۲}{۲} \Rightarrow ۲a + ۴ = a + ۲ \Rightarrow a = -۲$$

لذا مختصات مرکز دایره عبارت است از: $O(۰, ۰)$

و حال فاصلهٔ نقطهٔ $O(۰, ۰)$ از خط $x - ۲y + ۱ = ۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|۱\times۰-۲\times۰+۱|}{\sqrt{۱+۴}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۵}$$